Equations différentielles linéaires

Une *équation différentielle* est une équation, dont l'inconnue est une fonction y, exprimée sous la forme d'une relation dans laquelle cohabitent à la fois y et ses dérivées $y', y'' \dots$ Par exemple, $y' = x^2 e^y + 1$ est une équation différentielle. L'ennui, c'est qu'en général les équations différentielles sont très difficiles à résoudre. Nous nous contenterons pour cette raison de travailler dans le cadre à peu près agréable des *équations différentielles linéaires*, i.e. de la forme :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \qquad (n \text{ est appelé l'}\textit{ordre}\text{ de l'équation}).$$

Si la fonction b, appelée le *second membre* de l'équation, est nulle, on dit que l'équation en question est *homogène* ou *sans second membre*. L'appellation *linéaire* de ces équations différentielles est issue de la propriété fondamentale suivante :

Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation **homogène**,
alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est encore une solution de cette équation pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Continuité et dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes

Définition (Fonction continue/dérivable à valeurs complexes) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application.

- Soit $a \in I$. On dit que f est *continue en a* (resp. *dérivable en a*) si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. Dans le cas des fonctions dérivables, on appelle *nombre dérivé de f en a*, noté $f'(a)$, le nombre complexe $f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + i\,\mathrm{Im}(f)'(a)$.
- On dit que f est *continue sur I* (resp. *dérivable sur I*) si f l'est en tout point de I. Dans le cas des fonctions dérivables, l'application $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$ est appelée la *dérivée de f sur I*.

L'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues (resp. dérivables) sur I est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$).

Théorème (Dérivée des fonctions de la forme $x \longmapsto e^{\varphi(x)}$)

- Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. L'application $x \longmapsto e^{\varphi(x)}$ est dérivable sur I de dérivée l'application $x \longmapsto \varphi'(x)e^{\varphi(x)}$.
- En particulier, pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction $x \longmapsto e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto ae^{ax}$.

Démonstration Pour commencer : $\mathrm{Re}(e^\varphi) = e^{\mathrm{Re}(\varphi)} \cos \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(e^\varphi) = e^{\mathrm{Re}(\varphi)} \sin \mathrm{Im}(\varphi)$.

- Or par hypothèse φ est dérivable sur I ; en d'autres termes, $\mathrm{Re}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ le sont. Par composition avec les fonctions exponentielle, sinus et cosinus qui sont dérivables sur tout $\mathbb{R}$, $e^{\mathrm{Re}(\varphi)}$, $\cos \mathrm{Re}(\varphi)$ et $\sin \mathrm{Im}(\varphi)$ sont dérivables sur I et on a : $\left(e^{\mathrm{Re}(\varphi)}\right)' = \mathrm{Re}(\varphi)' e^{\mathrm{Re}(\varphi)}$,

$$\big(\cos \mathrm{Im}(\varphi)\big)' = -\mathrm{Im}(\varphi)' \sin \mathrm{Im}(\varphi) \qquad \text{et} \qquad \big(\sin \mathrm{Im}(\varphi)\big)' = \mathrm{Im}(\varphi)' \cos \mathrm{Im}(\varphi).$$

- Du coup, par produit, $\mathrm{Re}(e^\varphi) = e^{\mathrm{Re}(\varphi)} \cos \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(e^\varphi) = e^{\mathrm{Re}(\varphi)} \sin \mathrm{Im}(\varphi)$ sont dérivables sur I et on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(e^\varphi)' &= \left(e^{\mathrm{Re}(\varphi)} \cos \mathrm{Im}(\varphi)\right)' = \left(e^{\mathrm{Re}(\varphi)}\right)' \times \cos \mathrm{Im}(\varphi) + e^{\mathrm{Re}(\varphi)} \times \big(\cos \mathrm{Im}(\varphi)\big)' \\ &= \Big[\mathrm{Re}(\varphi)' \cos \mathrm{Im}(\varphi) - \mathrm{Im}(\varphi)' \sin \mathrm{Im}(\varphi)\Big] e^{\mathrm{Re}(\varphi)} \end{aligned}$$

et de même : $\mathrm{Im}(e^\varphi)' = \Big[\mathrm{Re}(\varphi)' \sin \mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\varphi)' \cos \mathrm{Im}(\varphi)\Big] e^{\mathrm{Re}(\varphi)}$.

- Nous avons bien montré que e^φ elle-même est dérivable sur I. En outre on peut vérifier que :

$$\big(e^\varphi\big)' = \mathrm{Re}(e^\varphi)' + i\mathrm{Im}(e^\varphi)' = \Big[\mathrm{Re}(\varphi)' + i\mathrm{Im}(\varphi)'\Big] \times \Big[\cos \mathrm{Im}(\varphi) + i \sin \mathrm{Im}(\varphi)\Big] e^{\mathrm{Re}(\varphi)} = \varphi' \times e^{i\mathrm{Im}(\varphi)} \times e^{\mathrm{Re}(\varphi)} = \varphi' e^\varphi$$

comme annoncé. ■

Le théorème suivant est momentanément admis. C'est en partie sur lui que les résultats de ce chapitre reposent.

Théorème (Caractérisation des fonctions dérivables constantes) Soient $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.

f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

2 Primitives

Définition (Primitive) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. On dit qu'une application $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est **une** *primitive de f sur I* si F est dérivable sur I de dérivée f.

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ est **une** primitive de $x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$ et Arctan est **une** primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème (« Unicité » des primitives) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. On suppose que f possède une primitive F sur I. Les primitives de f sur I sont alors toutes les applications $F + \lambda$, λ décrivant $\mathbb{K}$.

✖✖✖ **Attention !** Comme le montre ce théorème, il n'existe jamais une seule primitive. Il peut ne pas en exister, mais s'il en existe, il en existe une infinité et elles sont toutes égales à une constante additive près.

Démonstration Soit $\tilde{F} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \tilde{F} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I \quad &\Longleftrightarrow \quad \tilde{F}' = f \text{ sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{F}' = F' \text{ sur } I \\ &\Longleftrightarrow \quad \big(\tilde{F} - F\big)' = 0 \text{ sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{F} - F \text{ est constante sur } I \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{K} / \quad \tilde{F} = F + \lambda \text{ sur } I. \end{aligned}$$ ■

Définition (Intégrale sur un segment d'une fonction à valeurs complexes) Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ et $f \in \mathcal{C}\big([a,b], \mathbb{C}\big)$. On appelle *intégrale de f sur $[a,b]$* le nombre complexe $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\ \mathrm{d}t + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\ \mathrm{d}t$, noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

✖✖✖ **Attention !** Une intégrale en ce sens ne peut être interprétée comme une aire, même éventuellement comptée algébriquement, puisqu'il s'agit d'un nombre complexe.

Exemple $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ix}\ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos x\ \mathrm{d}x + i \int_0^{2\pi} \sin x\ \mathrm{d}x = \big[\sin x\big]_{x=0}^{x=2\pi} + i\big[-\cos x\big]_{x=0}^{x=2\pi} = 0 + i.0 = 0.$

Le théorème suivant est momentanément admis. C'est en partie sur lui que les résultats de ce chapitre reposent.

Théorème (Existence de primitives pour les fonctions continues) Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

- Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par : $\forall x \in I, \quad F(x) = \displaystyle\int_a^x f.$ Alors F est une primitive de f sur I.
- Pour tout $A \in \mathbb{K}$, il existe une et une seule primitive $F_{(a,A)}$ de f sur I telle que $F_{(a,A)}(a) = A$. Elle est définie par :

$$\forall x \in I, \quad F_{(a,A)}(x) = A + \int_a^x f.$$

✌✌✌ **Explication** Ce théorème est équivalent à la fameuse formule « $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ », où F est une primitive de f sur $[a,b]$. Nous verrons tout cela proprement en fin d'année.

3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

3.1 Equations homogènes (ou sans second membre)

Théorème (Equation différentielle $y' + a(x)y = 0$) Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, A une primitive de a sur I et $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $y' + ay = 0$ sur I. (ii) $y = \lambda e^{-A}$ sur I pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si de plus une condition (dite *condition initiale*) de la forme $y(x_0) = y_0$ est imposée, avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, alors la valeur de la constante λ est fixée ; l'équation avec condition initiale possède une et une seule solution.

Démonstration

- Commençons par l'équivalence des assertions (i) et (ii).

  (i) $\Longrightarrow$ (ii) Posons $z = ye^A$ sur I.
  Alors z est dérivable sur I et : $z' = y'e^A + yA'e^A = (y' + ay)e^A = 0$. Ceci implique que z est constante sur I en vertu d'un théorème admis au début de ce chapitre. C'est justement le résultat espéré.

  (ii) $\Longrightarrow$ (i) Evident, il suffit de dériver $y = \lambda e^{-A}$ pour voir que $y' + ay = -A'y + ay = -ay + ay = 0$.

- Et que se passe-t-il si on impose la condition initiale $y(x_0) = y_0$, où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$? Soit y une solution de l'équation $y' = a(x)y$ sur I. Nous venons de voir qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall x \in I, \quad y(x) = \lambda e^{-A(x)}$. Dire que $y(x_0) = y_0$ revient donc à dire que $\lambda e^{-A(x_0)} = y_0$, ou encore que $\lambda = y_0 e^{A(x_0)}$. La valeur de λ est ainsi déterminée comme l'énonce le théorème. ■

Exemple

- Les solutions de l'équation $y' = \dfrac{y}{1+x^2}$, où $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, sont toutes les $x \longmapsto \lambda e^{\mathrm{Arctan}\, x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
- Les solutions de l'équation $y' = y \tan x$, où $y \in \mathcal{D}\left(\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$, sont toutes les $x \longmapsto \lambda e^{-\ln \cos x} = \dfrac{\lambda}{\cos x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Corollaire (Caractérisation de la fonction $x \longmapsto e^{ax}$) Soit $a \in \mathbb{C}$. La fonction $x \longmapsto e^{ax}$ est l'unique application $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que : $y' = ay$ et $y(0) = 1$.

Corollaire (Equation fonctionnelle des exponentielles) Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$.

Alors soit f est nulle, soit : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{f'(0)x}$.

✌ ✌ ✌ **Explication** Ce corollaire affirme que les exponentielles sont les seules applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, dérivables, qui tranforment les sommes en produits.

Démonstration On a $f(0) = f(0+0) = f(0)f(0)$, de sorte que $f(0) \in \{0, 1\}$. Si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$. En d'autres termes, f est nulle. Dans la suite de la preuve, nous pouvons donc supposer que $f(0) = 1$.

Fixons pour un temps $x \in \mathbb{R}$. La fonction $y \longmapsto f(x+y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $y \longmapsto f'(x+y)$; de même, la fonction $y \longmapsto f(x)f(y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $y \longmapsto f(x)f'(y)$. Comme par hypothèse ces deux fonctions sont égales, on a donc : $\forall y \in \mathbb{R}, \quad f'(x+y) = f(x)f'(y)$.
En particulier pour $y = 0$, nous obtenons l'identité : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(0)f(x)$. Cette identité, le fait que $f(0) = 1$ et le corollaire précédent montre finalement que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{f'(0)x}$. ■

3.2 Equations avec second membre

Théorème (Equation différentielle $y'+a(x)y=b(x)$) Soient $a,b\in\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I, $x_0\in I$ et $y_0\in\mathbb{K}$. Il existe une et une seule solution sur I de l'équation $y'+a(x)y=b(x)$ telle que $y(x_0)=y_0$; elle est définie par :

$$\forall x\in I,\quad y(x)=y_0e^{A(x_0)-A(x)}+\int_{x_0}^{x}b(t)e^{A(t)-A(x)}\,\mathrm{d}t.$$

✎ ✎ ✎ **En pratique** Ce résultat a un intérêt uniquement théorique. Sa démonstration, en revanche, est à la base d'une méthode de calcul des solutions appelée *méthode de variation de la constante*. Vous devez impérativement savoir la mettre en œuvre.

Démonstration Soit $y\in\mathcal{D}(I,\mathbb{K})$. Introduisons $\lambda=ye^{A}$, de sorte que $y=\lambda e^{-A}$. Alors $\lambda\in\mathcal{D}(I,\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
y'+ay=b \quad\text{et}\quad y(x_0)=y_0 \quad&\Longleftrightarrow\quad \left(\lambda'e^{-A}-\lambda A'e^{-A}\right)+a\lambda e^{-A}=b \quad\text{et}\quad \lambda(x_0)=y_0e^{A(x_0)}\\
&\Longleftrightarrow\quad \lambda'e^{-A}-a\lambda e^{-A}+a\lambda e^{-A}=b \quad\text{et}\quad \lambda(x_0)=y_0e^{A(x_0)}\\
&\Longleftrightarrow\quad \lambda'e^{-A}=b \quad\text{et}\quad \lambda(x_0)=y_0e^{A(x_0)}\\
&\Longleftrightarrow\quad \lambda'=be^{A} \quad\text{et}\quad \lambda(x_0)=y_0e^{A(x_0)}\\
&\Longleftrightarrow\quad \lambda \text{ est une primitive de } be^{A} \text{ telle que } \lambda(x_0)=y_0e^{A(x_0)}\\
&\Longleftrightarrow\quad \forall x\in I,\quad \lambda(x)=y_0e^{A(x_0)}+\int_{x_0}^{x}b(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t\\
&\Longleftrightarrow\quad \forall x\in I,\quad y(x)=y_0e^{A(x_0)-A(x)}+\int_{x_0}^{x}b(t)e^{A(t)-A(x)}\,\mathrm{d}t. \qquad\blacksquare
\end{aligned}$$

✌ ✌ ✌ **Explication** Nous avons montré précédemment que les solutions de l'équation homogène $y'+a(x)y=0$ sont toutes les λe^{-A}, A étant une primitive fixée de a et $\lambda\in\mathbb{K}$ un nombre quelconque, une **constante**. Pour résoudre l'équation avec second membre $y'+a(x)y=b(x)$, la méthode de variation de la constante utilisée ci-dessus a consisté à chercher les solutions sous la même forme λe^{-A}, mais en considérant cette fois λ comme une **fonction**. Bref, il s'est agi de faire « varier la constante », comme le nom de la méthode l'indique.

Théorème (Equation différentielle $y'+a(x)y=b(x)$, solutions générale et particulière) Soient $a,b\in\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, A une primitive de a sur I et $\bar{y}$ une solution fixée de l'équation $y'+a(x)y=b(x)$ sur I dite *solution particulière*. Soit en outre $y\in\mathcal{D}(I,\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $y'+ay=b$ sur I.   (ii) $y=\bar{y}+\lambda e^{-A}$ sur I pour un certain $\lambda\in\mathbb{K}$.

Solution générale de l'équation avec second membre = solution particulière + solution générale de l'équation **homogène**

En d'autres termes, si on connaît **<u>une</u>** solution particulière de l'équation $y'+a(x)y=b(x)$, alors on en connaît **<u>toutes</u>** les solutions : toute solution est en effet la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation **homogène** associée.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Posons $z=y-\bar{y}$. Alors z est dérivable sur I et $z'+az=(y'+ay)-(\bar{y}'+a\bar{y})=b-b=0$ sur I. Ainsi z est solution de l'équation homogène associée, comme voulu.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Evident. $\blacksquare$

✎ ✎ ✎ **En pratique** Nos deux précédents théorèmes nous offrent une méthode en or pour la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre. En voici les étapes :

1) On cherche les solutions $\tilde{y}$ de l'équation homogène associée $y'+a(x)y=0$.

2) On cherche **<u>une</u>** solution particulière $\bar{y}$ de l'équation avec second membre $y'+a(x)y=b(x)$ au moyen de la méthode de variation de la constante.

3) Alors les solutions de l'équation $y'+a(x)y=b(x)$ sont toutes les $\bar{y}+\tilde{y}$, où $\tilde{y}$ est une solution trouvée en 1).

4) Si une condition initiale est imposée, on en tient compte en choisissant convenablement la constante dans la solution $\tilde{y}$.

Exemple L'unique solution de l'équation $xy' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ qui s'annule en 1 est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3-1}{3x}$.

En effet

- **Réécriture de l'équation :** Réécrivons tout d'abord cette équation sous la forme $y' + \dfrac{y}{x} = x$ pour nous ramener aux théorèmes précédents. Nous ne pouvons la résoudre sur $\mathbb{R}$ tout entier puisque $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'est tout simplement pas définie en 0. Pour cette raison, nous ne la résoudrons que sur $\mathbb{R}_+^\times$. — Nous ne pouvons pas la résoudre sur $\mathbb{R}^\times$ car $\mathbb{R}^\times$ n'est pas un intervalle ; or nos théorèmes ne sont vrais que sur des intervalles.
- **Résolution de l'équation homogène :** Puisque la fonction logarithme est une primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^\times$, les solutions de l'équation homogène $y' + \dfrac{y}{x} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ sont toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda e^{-\ln x} = \dfrac{\lambda}{x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.
- **Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre :** Cherchons une solution particulière de l'équation $y' + \dfrac{y}{x} = x$ sous la forme $y : x \longmapsto \dfrac{\lambda(x)}{x}$ où $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^\times, \mathbb{R})$ — variation de la constante.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \frac{x\lambda'(x) - \lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = x$$
$$\iff \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = x^2.$$

  Nous pouvons donc choisir pour λ la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$ primitive de $x \longmapsto x^2$, de sorte que $y : x \longmapsto \dfrac{x^2}{3}$ est une solution particulière de notre équation.
- **Conclusion :** Les solutions (réelles) de l'équation $xy' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ sont les $x \longmapsto \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{\lambda}{x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). L'unique solution qui s'annule en 1 est obtenue pour $\lambda = -\dfrac{1}{3}$; c'est bien $x \longmapsto \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{1}{3x} = \dfrac{x^3-1}{3x}$.

✎✎✎ **En pratique** Sur une copie, vous n'êtes pas obligés de rédiger la méthode de la variation de la constante. Vous pouvez vous contenter de la mettre en œuvre au brouillon et écrire seulement sur votre copie : « Vérifions que la fonction machin (celle que vous avez trouvée au brouillon) est une solution de l'équation ». Une telle rédaction est tout à fait correcte et rapide. A l'oral cependant, la distinction brouillon/copie ne vaut plus. Dans ce cas vous devez savoir rédiger convenablement la méthode de variation de la constante.

Théorème (Principe de superposition) Soient $a, b_1, b_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.
Si y_1 est une solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b_1(x)$ et si y_2 est une solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de l'équation $y' + a(x)y = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x)$ pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

✎✎✎ **En pratique** Ce théorème, dont la démonstration est triviale, montre que pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$, on n'a qu'à additionner une solution particulière de chacune des équations $y' + a(x)y = b_1(x)$ et $y' + a(x)y = b_2(x)$. Au lieu de faire un seul calcul complexe, on choisit d'en faire deux simples.

✎✎✎ **En pratique** Pour certains seconds membres, on peut éviter d'utiliser la méthode de variation de la constante à condition de connaître la technique décrite ci-après, qui couvre un très grand nombre de cas courants. Notez bien que cette méthode ne concerne que les équations différentielles linéaires du premier ordre **à coefficients constants**.
Soient $a, k \in \mathbb{K}$ et P une fonction polynomiale de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- **Equations de la forme $y' + ay = P(x)e^{kx}$:**
  Pour ce type d'équation, une solution particulière peut être cherchée sous la forme $x \longmapsto Q(x)e^{kx}$, où Q est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré :

  1) inférieur ou égal à n si $k \neq -a$; 2) inférieur ou égal à $(n+1)$ si $k = -a$.

- **Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, équations de la forme $y' + ay = P(x)\cos(kx)$ ou $y' + ay = P(x)\sin(kx)$:**
  Pour trouver une solution particulière de ce type d'équation, on commence par chercher une solution particulière **complexe** $y_\mathbb{C}$ de l'équation **complexe** $y' + ay = P(x)e^{ikx}$; on applique pour cela la méthode décrite à l'instant en introduisant une fonction polynomiale à coefficients **complexes**.
  On remarque alors que $\mathrm{Re}(y_\mathbb{C})$ est une solution particulière de l'équation $y' + ay = P(x)\cos(kx)$ et que $\mathrm{Im}(y_\mathbb{C})$ est une solution particulière de l'équation $y' + ay = P(x)\sin(kx)$.

- **Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, équations de la forme $y' + ay = P(x)\mathrm{ch}(kx)$ ou $y' + ay = P(x)\mathrm{sh}(kx)$:**
  Pour trouver une solution particulière de ce type d'équation, on commence par chercher une solution particulière y^+ de l'équation $y' + ay = P(x)e^{kx}$ et une solution particulière y^- de l'équation $y' + ay = P(x)e^{-kx}$. Alors via le principe de superposition, $\dfrac{y^+ + y^-}{2}$ est une solution particulière de l'équation $y' + ay = P(x)\mathrm{ch}(kx)$ et $\dfrac{y^+ - y^-}{2}$ est une solution particulière de l'équation $y' + ay = P(x)\mathrm{sh}(kx)$.

Exemple La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'+2y=2xe^x+e^{-2x}$ qui s'annule en 0 est la fonction $x\longmapsto \frac{3x-1}{9}\,e^x+\frac{9x+1}{9}\,e^{-2x}$.

En effet

- **Résolution de l'équation homogène :** Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $y'+2y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto \lambda e^{-2x}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.
- **Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'+2y=xe^x$:** Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de $y'+2y=xe^x$ sous la forme $x\longmapsto (ax+b)e^x$, où $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x\longmapsto (ax+b)e^x \text{ est solution de } y'+2y=xe^x \quad&\Longleftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \Big(ax+(a+b)\Big)e^x+2(ax+b)e^x=xe^x\\
&\Longleftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad (3a-1)x+(a+3b)=0\\
&\Longleftrightarrow\quad 3a-1=a+3b=0 \qquad \text{après identification}\\
&\Longleftrightarrow\quad a=\frac{1}{3}\quad\text{et}\quad b=-\frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

  Ainsi $x\longmapsto \frac{3x-1}{9}\,e^x$ est une solution particulière de l'équation $y'+2y=xe^x$.
- **Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'+2y=e^{-2x}$:** Cherchons une solution particulière de l'équation $y'+2y=e^{-2x}$ sous la forme $x\longmapsto (ax+b)e^{-2x}$, où $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&x\longmapsto (ax+b)e^{-2x} \text{ est solution de } y'+2y=e^{-2x}\\
&\qquad\Longleftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \Big(ae^{-2x}-2(ax+b)e^{-2x}\Big)+2(ax+b)e^{-2x}=e^{-2x}\\
&\qquad\Longleftrightarrow\quad a=1. \qquad \text{La fonction } x\longmapsto xe^{-2x} \text{ convient.}
\end{aligned}$$

- **Conclusion :** Via le principe de superposition, les solutions de l'équation $y'+2y=2xe^x+e^{-2x}$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto \frac{2}{9}\,(3x-1)e^x+(x+\lambda)e^{-2x}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$. L'unique solution nulle en 0 est obtenue pour $\lambda=\frac{2}{9}$.

Exemple La solution de l'équation $y'-y=\sin x$ qui vaut 1 en 0 est la fonction $x\longmapsto \frac{3e^x-\sin x-\cos x}{2}$.

En effet

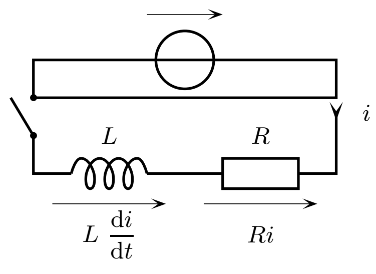
- **Résolution de l'équation homogène :** Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $y'-y=0$ sont toutes les $x\longmapsto \lambda e^x$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.
- **Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'-y=e^{ix}$:** Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'-y=e^{ix}$ sous la forme $x\longmapsto ae^{ix}$, où $a\in\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
x\longmapsto ae^{ix} \text{ est solution de } y'-y=e^{ix} \quad&\Longleftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad iae^{ix}-ae^{ix}=e^{ix}\\
&\Longleftrightarrow\quad a(i-1)=1 \quad\Longleftrightarrow\quad a=\frac{1}{i-1}=-\frac{i+1}{2}.
\end{aligned}$$

  La fonction $x\longmapsto -\frac{i+1}{2}\,e^{ix}$ convient.
- **Conclusion :** Via le point précédent, la fonction $x\longmapsto \mathrm{Im}\left(-\frac{i+1}{2}\,e^{ix}\right)=-\frac{\sin x+\cos x}{2}$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation avec second membre $y'-y=\sin x$. Les solutions de cette équation sont finalement toutes les fonctions $x\longmapsto -\frac{\sin x+\cos x}{2}+\lambda e^x$ $(\lambda\in\mathbb{R})$. L'unique solution qui vaut 1 en 0 est obtenue $\lambda=\frac{3}{2}$.

Exemple Un peu de physique... On s'intéresse au circuit RL série ci-contre, dans lequel E est un échelon de tension, i.e. une tension constante. On réalise l'expérience suivante : avant l'instant $t=0$, le circuit est ouvert et donc l'intensité i est nulle ; on ferme le circuit à $t=0$. Question : comment l'intensité i évolue-t-elle ?

La loi d'Ohm affirme que la tension aux bornes du conducteur ohmique de résistance R est Ri et que la tension aux bornes de la bobine d'inductance L est $L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Du coup, la loi des mailles nous fournit l'équation différentielle suivante : $L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=E$.
Posons $\tau=\frac{L}{R}$; ce réel, homogène à une durée, est appelé la *constante de temps* du circuit.
Notre équation différentielle se réécrit ainsi : $i'+\frac{i}{\tau}=\frac{E}{L}$. Nous allons la résoudre sous la forme abstraite $y'+\frac{y}{\tau}=\frac{E}{L}$ sur $\mathbb{R}_+$.



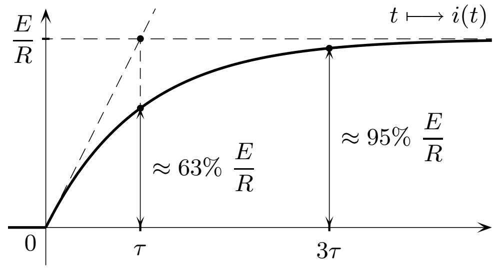
- Commençons par déterminer les solutions de l'équation homogène associée $y'+\frac{y}{\tau}=0$. C'est facile, ce sont toutes les applications $t\longmapsto \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

- Cherchons ensuite une solution particulière de l'équation avec second membre. La chose est ici très facile, on peut éviter la méthode de variation de la constante moyennant un petit effort d'intuition. Notre second membre est une constante $\frac{E}{L}$. Puisque la dérivée d'une fonction constante est nulle, la fonction constante $t \longmapsto \frac{\tau E}{L} = \frac{E}{R}$ est une solution particulière de l'équation $y' + \frac{y}{\tau} = \frac{E}{L}$.

- Finalement, dans le cas qui nous intéresse, i est de la forme : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad i(t) = \frac{E}{R} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$ (solution particulière + solution générale de l'équation homogène). Déterminons enfin λ à partir des conditions initiales. Nous savons que $i(0) = 0$ car l'intensité dans une bobine varie continûment. Du coup, un calcul immédiat montre que $\lambda = -\frac{E}{R}$. Conclusion :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

- Analysons pour finir un peu ce résultat.
On a $\lim_{t \to \infty} i(t) = \frac{E}{R}$ et le graphe de i indique clairement que i atteint « assez vite » sa limite $\frac{E}{R}$. On peut ainsi décomposer par la pensée l'évolution de i en la juxtaposition de deux régimes : un régime dit *transitoire* et un autre dit *permanent*. Le régime permanent décrit l'évolution de i au voisinage de $t = \infty$: dans notre exemple, le régime permanent est pratiquement constant égal à $\frac{E}{R}$. Le régime transitoire au contraire, décrit l'évolution de i au voisinage de $t = 0$; il nous parle donc d'un état passager du circuit étudié.



Classiquement, on considère que le régime permanent est atteint à partir de $t = 3\tau$. Pourquoi cette valeur ? On aurait pu en choisir une autre, mais celle-ci est simple à utiliser : $i(3\tau) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-3}\right) \approx 0,95\ \frac{E}{R} \approx 95\%\ \frac{E}{R}$.

Notez que l'on peut déterminer aisément la valeur de τ sur le graphe de i. La tangente de i en 0 est la droite d'équation $y = i'(0)(t-0) + i(0) = \frac{E}{R\tau}t$. Elle coupe la droite d'équation $y = \frac{E}{R}$ (régime permanent) en le point de coordonnées $\left(\tau, \frac{E}{R}\right)$. Par conséquent τ est l'abscisse de ce point. Notez enfin l'approximation suivante :

$$i(\tau) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0,63\ \frac{E}{R} \approx 63\%\ \frac{E}{R}.$$

4 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

4.1 Equations homogènes (ou sans second membre)

Théorème (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$) Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$. Notons Δ son discriminant.

- **Cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :**

1) Si $\Delta \neq 0$, soient r et r' les racines distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{rx} + \lambda' e^{r'x}$ $(\lambda, \lambda' \in \mathbb{C})$.

2) Si $\Delta = 0$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$.

- **Cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :**

1) Si $\Delta > 0$, soient r et r' les racines (réelles) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{rx} + \lambda' e^{r'x}$ $(\lambda, \lambda' \in \mathbb{R})$.

2) Si $\Delta = 0$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

3) Si $\Delta < 0$, soient $r + i\omega$ et $r - i\omega$ les racines (complexes conjuguées) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \longmapsto \Big(\lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x)\Big)e^{rx}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$, qu'on peut aussi mettre sous la forme $x \longmapsto \lambda \sin(\omega x + \varphi)e^{rx}$ ou $x \longmapsto \lambda \cos(\omega x + \varphi)e^{rx}$ $(\lambda, \varphi \in \mathbb{R})$.

Si de plus une condition (dite *condition initiale*) de la forme $y(x_0) = y_0$ **et** $y'(x_0) = y'_0$ est imposée, avec $x_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$, alors la valeur des constantes est fixée ; l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ avec condition initiale possède une et une seule solution.

✖✖✖ **Attention !** Dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre, on pouvait déterminer complètement une solution en imposant seulement une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$. Dans le cas des équations différentielles linéaires du second ordre, il est nécessaire d'imposer une condition initiale double de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.

Démonstration Dans un premier temps, nous allons travailler avec des nombres complexes. Nous nous arrêterons sur le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ en fin de promenade.

- Toute cette preuve repose sur l'idée suivante. Pour tout $r \in \mathbb{C}$:

La fonction $x \longmapsto e^{rx}$ est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$

$$\iff \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \quad \iff \quad ar^2 + br + c = 0$$
$$\iff \quad r \text{ est une racine du polynôme caractéristique de l'équation } ay'' + by' + cy = 0.$$

- Fixons alors momentanément une racine r du polynôme $aX^2 + bX + c$ et cherchons les solutions de notre équation sous la forme $y : x \longmapsto z(x)e^{rx}$ — méthode de variation de la constante. Anticipant la fin du calcul qui suit, nous remarquons tout de suite que la seconde racine du polynôme $aX^2 + bX + c$ est égale à $-r - \dfrac{b}{a}$, car la somme des racines du polynôme $aX^2 + bX + c$ vaut $-\dfrac{b}{a}$; notons-la r'.

$$\begin{aligned}
ay'' + by' + cy = 0 \quad &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a\Big(z''(x) + 2rz'(x) + r^2 z(x)\Big)e^{rx} + b\Big(z'(x) + rz(x)\Big)e^{rx} + cz(x)e^{rx} = 0 \\
&\iff \quad az'' + (2ar + b)z' + \underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0} z = 0 \\
&\iff \quad (z')' + \left(2r + \frac{b}{a}\right) z' = 0 \qquad \text{(tiens, voilà une équation linéaire du premier ordre)} \\
&\iff \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = \lambda e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x}.
\end{aligned}$$

La fin de ce calcul requiert qu'on distingue les cas $\Delta \neq 0$ et $\Delta = 0$.

- Supposons d'abord que $\Delta \neq 0$. Alors $r \neq -\dfrac{b}{2a}$, et donc $2r + \dfrac{b}{a} \neq 0$. Achevons notre calcul :

$$\begin{aligned}
ay'' + by' + cy = 0 \quad &\iff \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = \lambda e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x} \\
&\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = \frac{\lambda e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x}}{-\left(2r + \dfrac{b}{a}\right)} + \mu \qquad \text{après primitivation} \\
&\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = \lambda e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x} + \mu \qquad \text{(on change le } \lambda\text{)} \\
&\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = z(x)e^{rx} = \lambda e^{-\left(r + \frac{b}{a}\right)x} + \mu e^{rx} \\
&\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda e^{r'x} + \mu e^{rx} \qquad \text{comme voulu.}
\end{aligned}$$

- Supposons ensuite que $\Delta = 0$. Alors $r = -\dfrac{b}{2a}$ est l'unique racine du polynôme $aX^2 + bX + c$. En outre, $2r + \dfrac{b}{a} = 0$. Achevons ici aussi notre calcul :

$$\begin{aligned}
ay'' + by' + cy = 0 \quad &\iff \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = \lambda e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x} \\
&\iff \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = \lambda \\
&\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = \lambda x + \mu \qquad \text{après primitivation} \\
&\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = z(x)e^{rx} = (\lambda x + \mu)e^{rx} \qquad \text{comme voulu.}
\end{aligned}$$

- Ainsi le cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ est complètement traité. Penchons-nous donc sur le cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Cette fois, $a,b,c\in\mathbb{R}$ et nous cherchons les solutions **réelles** de l'équation $ay''+by'+cy=0$. Cela revient, parmi les solutions complexes trouvées ci-dessus, à déterminer lesquelles sont réelles et lesquelles ne le sont pas. Contentons-nous de faire ce travail dans le cas le plus intéressant, le cas $\Delta<0$. Les racines de aX^2+bX+c sont alors complexes conjuguées de la forme $r\pm i\omega$ avec $\omega\neq 0$.

  Soit y une solution complexe de l'équation $ay''+by'+cy=0$. En vertu des points précédents, il existe donc $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tels que : $\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)=\alpha e^{rx+i\omega x}+\beta e^{rx-i\omega x}=\left(\alpha e^{i\omega x}+\beta e^{-i\omega x}\right)e^{rx}$.

  Supposons y à valeurs réelles. En particulier $\mathrm{Im}\big[y(0)\big]=0$ et $\mathrm{Im}\left[y\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right)\right]=0$. Or :
  1) $\mathrm{Im}\big[y(0)\big]=\mathrm{Im}(\alpha+\beta)$, donc $\mathrm{Im}(\beta)=-\mathrm{Im}(\alpha)$;
  2) $\mathrm{Im}\left[y\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right)\right]=\mathrm{Im}\left[i(\alpha-\beta)e^{\frac{\pi r}{2\omega}}\right]=\mathrm{Im}\left[i(\alpha-\beta)\right]e^{\frac{\pi r}{2\omega}}=\mathrm{Re}(\alpha-\beta)e^{\frac{\pi r}{2\omega}}$, donc $\mathrm{Re}(\beta)=\mathrm{Re}(\alpha)$.

  L'air de rien, nous venons de montrer que $\beta=\bar{\alpha}$. Du coup, si nous posons $\lambda=2\mathrm{Im}(\alpha)$ et $\mu=2\mathrm{Re}(\alpha)$:
  $$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)&=\left(\alpha e^{i\omega x}+\bar{\alpha}e^{-i\omega x}\right)e^{rx}=2\mathrm{Re}\left(\alpha e^{i\omega x}\right)e^{rx}=\Big(2\mathrm{Re}(\alpha)\cos(\omega x)+2\mathrm{Im}(\alpha)\sin(\omega x)\Big)e^{rx}\\&=\Big(\lambda\sin(\omega x)+\mu\cos(\omega x)\Big)e^{rx}\qquad\text{comme voulu.}\end{aligned}$$

- Pour finir, transformons l'expression précédente de y en tenant compte des besoins du physicien. Le physicien préfère travailler avec des solutions de la forme « $y(x)=\lambda\sin(\omega x+\varphi)e^{rx}$ » ou « $y(x)=\lambda\cos(\omega x+\varphi)e^{rx}$ » car il lui est facile d'interpréter alors λ comme une *amplitude* et φ comme un *déphasage*. Mais comment diable obtient-on ce type d'expressions ? Utilisez le dernier résultat de notre précédent chapitre « Fonctions circulaires ». ■

Exemple L'unique solution y de l'équation $y''-3y'+2y=0$ qui vérifie $y(0)=1$ et $y'(0)=0$ est la fonction $y:x\longmapsto 2e^x-e^{2x}$.

En effet Les solutions de l'équation $y''-3y'+2y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto\lambda e^x+\mu e^{2x}$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$, car le polynôme X^2-3X+2 possède deux racines réelles distinctes, à savoir 1 et 2. Soient y la solution qui vérifie $y(0)=1$ et $y'(0)=0$, et λ et μ les constantes associées. On a : $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad y'(x)=\lambda e^x+2\mu e^{2x}$.
$$y(0)=1\quad\text{et}\quad y'(0)=0\qquad\iff\qquad\lambda+\mu=1\quad\text{et}\quad\lambda+2\mu=0\qquad\iff\qquad\lambda=2\quad\text{et}\quad\mu=-1.$$

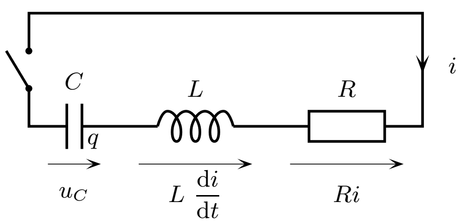
Exemple L'unique solution y de l'équation $y''-2y'+y=0$ qui vérifie $y(0)=0$ et $y'(0)=1$ est la fonction $y:x\longmapsto xe^x$.

En effet Les solutions de l'équation $y''-2y'+y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto(\lambda x+\mu)e^x$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$, car le polynôme X^2-2X+1 possède une unique racine double, égale à 1. Soient y la solution qui vérifie $y(0)=0$ et $y'(0)=1$, et λ et μ les constantes associées. On a : $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad y'(x)=(\lambda x+\lambda+\mu)e^x$.
$$y(0)=0\quad\text{et}\quad y'(0)=1\qquad\iff\qquad\mu=0\quad\text{et}\quad\lambda+\mu=1\qquad\iff\qquad\lambda=1\quad\text{et}\quad\mu=0.$$

Exemple L'unique solution y de l'équation $y''+4y=0$ qui vérifie $y(0)=0$ et $y'(0)=-1$ est la fonction $y:x\longmapsto-\dfrac{\sin(2x)}{2}$.

En effet Les solutions (réelles) de l'équation $y''+4y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto\lambda\sin(2x)+\mu\cos(2x)$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$, car le polynôme X^2+4 possède deux racines complexes conjuguées qui sont $\pm 2i$. Soient y la solution qui vérifie $y(0)=0$ et $y'(0)=-1$, et λ et μ les constantes associées. On a : $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad y'(x)=2\lambda\cos(2x)-2\mu\sin(2x)$.
$$y(0)=0\quad\text{et}\quad y'(0)=-1\qquad\iff\qquad\mu=0\quad\text{et}\quad 2\lambda=-1\qquad\iff\qquad\lambda=-\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad\mu=0.$$

Exemple On s'intéresse au circuit RLC série ci-contre en régime transitoire. Il s'égit d'étudier la décharge d'un condensateur dans une bobine et une résistance.



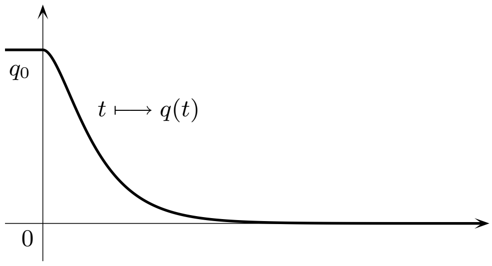
On dispose des relations suivantes : $\quad q=Cu_C\quad$ et $\quad i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Par ailleurs la loi des mailles nous donne l'identité : $\quad L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+u_C=0$. En mixant ce petit monde, nous obtenons l'équation différentielle finale :
$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\,q=0,$$
où l'on a noté $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ la *pulsation propre* du circuit et $Q=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ son *facteur de qualité*.

Nous réalisons l'expérience suivante : avant l'instant $t=0$, le circuit est ouvert (et donc l'intensité i est nulle) et le condensateur est chargé d'une charge q_0 ; on ferme le circuit à $t=0$. Question : comment la charge q du condensateur évolue-t-elle ?

Le polynôme caractéristique de notre équation est $X^2+\dfrac{\omega_0}{Q}\,X+\omega_0^2$. Son discriminant Δ vaut $\Delta=\dfrac{\omega_0^2}{Q^2}-4\omega_0^2=\left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2(1-4Q^2)$.

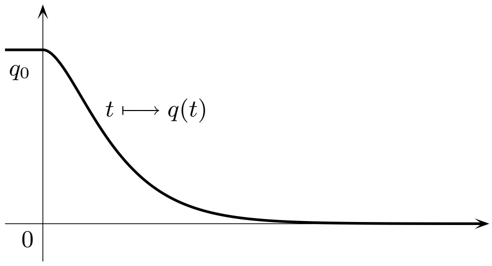
La position de Q par rapport à $\dfrac{1}{2}$ détermine donc la nature du comportement de q.

- **Régime apériodique :** $Q < \frac{1}{2}$, i.e. $\Delta > 0$.
  Les racines du polynôme caractéristique sont $-\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$, strictement négatives, que nous notons ω_1 et ω_2. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $q(t) = \lambda e^{\omega_1 t} + \mu e^{\omega_2 t}$. Notez que $q(0) = q_0$ et que $q'(0) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0) = i(0) = 0$, car la charge d'un condensateur et l'intensité parcourant une bobine sont des fonctions continues du temps.



- **Régime critique :** $Q = \frac{1}{2}$, i.e. $\Delta = 0$.
  Notre polynôme caractéristique ne possède ici qu'une unique racine double $-\frac{\omega_0}{2Q}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

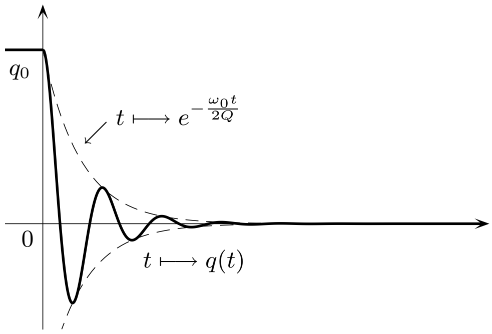
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad q(t) = (\lambda t + \mu) e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}.$$



- **Régime pseudo-périodique :** $Q > \frac{1}{2}$, i.e. $\Delta < 0$.
  Les racines du polynôme caractéristique sont $-\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad q(t) = \left[\lambda \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\right) + \mu \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\right)\right] e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}.$$

  La charge q du condensateur décroît vers 0 en oscillant à l'intérieur d'un tube exponentiel.



Il ressort de ces courbes que la charge q du condensateur tend vers 0 dans tous les cas, et même assez vite — décroissance exponentielle. Physiquement, cela veut dire que le condensateur se décharge. Dans cette situation de montage, le régime permanent n'est d'aucun intérêt : il ne s'y passe rien.

4.2 Equations avec second membre

Pour ne pas perdre trop de temps, nous ne démontrerons pas les trois résultats suivants. En réalité, seul le premier nécessite une démonstration non triviale ; les deux autres se démontrent comme dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre.

Théorème (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$) Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$. Il existe une et une seule solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.

Théorème (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$, solutions générale et particulière) Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$, $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\bar{y}$ une solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ sur I dite *solution particulière*. Soit en outre $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $ay'' + by' + cy = d$ sur I. (ii) $y = \bar{y} + \tilde{y}$ sur I pour une certaine solution $\tilde{y}$ de l'équation homogène.

Solution générale de l'équation avec second membre = solution particulière + solution générale de l'équation **homogène**

En d'autres termes, si on connaît **<u>une</u>** solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$, alors on en connaît **<u>toutes</u>** les solutions : toute solution est en effet la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation **homogène** associée.

Théorème (Principe de superposition) Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et $d_1, d_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.
Si y_1 est une solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(x)$ et si y_2 est une solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = d_2(x)$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de l'équation $ay'' + by' + cy = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x)$ pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

✎✎✎ **En pratique**

- Comme dans le cas des équations du premier ordre, on dispose d'une méthode classique de recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = P(x)e^{kx}$, où $a, b, c, k \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et où P est une fonction polynomiale de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Elle consiste à chercher une solution de la forme $x \longmapsto Q(x)e^{kx}$, où Q est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré :
  1) inférieur ou égal à n si k n'est pas racine du polynôme $aX^2 + bX + c$;
  2) inférieur ou égal à $(n+1)$ si k est racine **simple** du polynôme $aX^2 + bX + c$ (i.e. si k est racine et si le discriminant est non nul) ;
  3) inférieur ou égal à $(n+2)$ si k est racine **double** du polynôme $aX^2 + bX + c$ (i.e. si k est racine et si le discriminant est nul).
- Cette méthode s'adapte très bien, comme avec les équations du premier ordre, au cas des fonction sinus, cosinus, sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique.

Le programme de MPSI ne vous demande pas de savoir en découdre avec d'autres seconds membres que ceux-ci dans le cas des équations différentielles linéaires du second ordre.

Exemple Les solutions de l'équation $y'' - y = x^2 + 1 - e^x$ sont les fonctions $x \longmapsto -x^2 - 3 + \left(\lambda - \frac{x}{2}\right) e^x + \mu e^{-x}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

En effet

- **Résolution de l'équation homogène :** Les solutions de l'équation homogène $y'' - y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$, car les racines du polynôme $X^2 - 1$ sont ± 1.
- **Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - y = x^2 + 1$:** Cherchons une solution particulière de l'équation $y'' - y = x^2 + 1$ sous la forme $y : x \longmapsto (ax^2 + bx + c)$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = x^2 + 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (a+1)x^2 + bx + (c - 2a + 1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a + 1 = b = c - 2a + 1 = 0 \qquad \text{après identification} \\ &\Longleftrightarrow \quad a = -1, \quad b = 0 \quad \text{et} \quad c = -3.\end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto -x^2 - 3$ convient donc.
- **Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - y = e^x$:** Cherchons une solution de l'équation $y'' - y = e^x$ sous la forme $y : x \longmapsto (ax + b)e^x$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = e^x \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big(ax + (2a + b)\Big)e^x - (ax + b)e^x = e^x \\ &\Longleftrightarrow \quad 2a = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{xe^x}{2}$ convient.
- **Conclusion :** Ls solutions de l'équation complète $y'' - y = x^2 + 1 - e^x$ sont toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto -x^2 - 3 + \left(\lambda - \frac{x}{2}\right) e^x + \mu e^{-x}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ comme annoncé.

Exemple Les solutions de l'équation $y'' + y' + y = e^x \cos x$ sont toutes les fonctions :

$$x \longmapsto \left(\frac{2\cos x + 3\sin x}{13}\right) e^x + \left[\lambda \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right] e^{-\frac{x}{2}} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

En effet

- **Résolution de l'équation homogène :** Les solutions de l'équation $y'' + y' + y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \left[\lambda \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right] e^{-\frac{x}{2}}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$, car les racines du polynôme $X^2 + X + 1$ sont $e^{\pm\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- **Recherche d'une solution particulière de l'équation** $y''+y'+y=e^{(1+i)x}$ **:** Cherchons une solution particulière de $y''+y'+y=e^{(1+i)x}$ sous la forme $y : x \longmapsto ae^{(1+i)x}$, où $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x)+y'(x)+y(x)=e^{(1+i)x} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+i)^2 ae^{(1+i)x}+(1+i)ae^{(1+i)x}+ae^{(1+i)x}=e^{(1+i)x}\\ &\iff (2+3i)a=1 \quad \iff \quad a=\frac{1}{2+3i}=\frac{2-3i}{13}.\end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto \frac{2-3i}{13}\,e^{(1+i)x}$ convient.
On en déduit aussitôt que la fonction $x \longmapsto \mathrm{Re}\left(\frac{2-3i}{13}\,e^{(1+i)x}\right)=\left(\frac{2\cos x+3\sin x}{13}\right)e^x$ est une solution particulière de l'équation $y''+y'+y=e^x\cos x$.

- **Conclusion :** On obtient bien le résultat annoncé.

5 La méthode d'Euler

- En physique, les équations différentielles obtenues décrivent généralement l'évolution d'un système en fonction du temps. Elles sont malheureusement souvent difficiles à résoudre. Qu'à cela ne tienne : n'est-il pas possible d'obtenir des approximations satisfaisantes des solutions exactes ? Si, au moyen de la méthode d'Euler par exemple.

- La méthode d'Euler est une méthode générale de résolution approchée des équations différentielles du premier ordre. Nous ne l'étudierons que dans le cas particulier des équations diférentielles **linéaires** du premier ordre. Nous travaillerons sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$ où α et β sont deux réels fixés tels que $\alpha<\beta$ et notre équation différentielle sera l'équation $y'=a(x)y+b(x)$ dans laquelle $a,b \in \mathcal{C}\big([\alpha,\beta],\mathbb{R}\big)$ — attention, ce n'est pas tout à fait cette équation que nous avons étudiée jusqu'ici.
Un réel y_0 étant fixé, nous noterons toujours y la solution (exacte) de cette équation pour laquelle $y(\alpha)=y_0$. Un entier naturel non nul n étant aussi fixé par ailleurs, posons $h=\frac{\beta-\alpha}{n}$ et $x_k=\alpha+kh$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. La famille $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille des points en lesquels nous allons approximer y ; ces points sont répartis uniformément le long du segment $[\alpha,\beta]$, d'une extrêmité à l'autre ($x_0=\alpha$ et $x_n=\beta$) ; deux points consécutifs sont distants de la longueur h qui est appelée le *pas* de la subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. Après avoir approximé $y(x_k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, nous relierons les points obtenus par des segments de droite et aurons ainsi obtenu — nous l'espérons — une approximation de y sur tout $[\alpha,\beta]$.
Enfin, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k=a(x_k)$ et $b_k=b(x_k)$.

- La méthode d'Euler repose sur le principe d'approximation suivant : une fonction dérivable en un point peut être approximée par sa tangente au voisinage de ce point. En particulier, on a donc, pour tout $x \in [\![\alpha,\beta]\!]$:

$$y(x+h)\approx y(x)+hy'(x)=y(x)+h\big(a(x)y(x)+b(x)\big)=\big(1+ha(x)\big)y(x)+hb(x).$$

Cette formule signifie qu'on peut calculer une approximation de $y(x+h)$ quand on connaît $y(x)$. Tout ceci ne semble pas très rigoureux, mais nous ne disposons pas des moyens nécessaires à une présentation propre de la méthode d'Euler.

- Décrivons à présent la méthode à proprement parler. Nous partons de l'information « $y(\alpha)=y_0$ ». Le point de coordonnées $\big(\alpha,y(\alpha)\big)=(x_0,y_0)$ est un point du graphe de y. Appliquons en ce point le principe d'approximation décrit précédemment :

$$y(x_1)=y(x_0+h)\approx y(x_0)+hy'(x_0)=\big(1+ha(x_0)\big)y(x_0)+hb(x_0)=(1+ha_0)y_0+hb_0$$

et notons $y_1=(1+ha_0)y_0+hb_0$ l'approximation de $y(x_1)$ ainsi calculée. Poursuivons en approximant à présent $y(x_2)$:

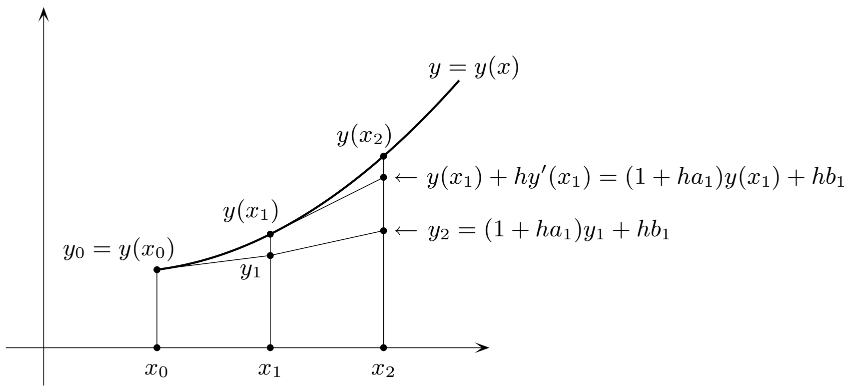
$$y(x_2)=y(x_1+h)\approx y(x_1)+hy'(x_1)=\big(1+ha(x_1)\big)y(x_1)+hb(x_1)=(1+ha_1)y(x_1)+hb_1\approx(1+ha_1)y_1+hb_1,$$

et notons $y_2=(1+ha_1)y_1+hb_1$ l'approximation ainsi calculée. Généralisons ce procédé. Pour un certain $k \in [\![0,n-1]\!]$, supposons que nous avons su définir le réel y_k, approximation de $y(x_k)$, et tâchons alors de définir y_{k+1}. C'est facile :

$$y(x_{k+1})=y(x_k+h)\approx y(x_k)+hy'(x_k)=\big(1+ha(x_k)\big)y(x_k)+hb(x_k)=(1+ha_k)y(x_k)+hb_k\approx(1+ha_k)y_k+hb_k,$$

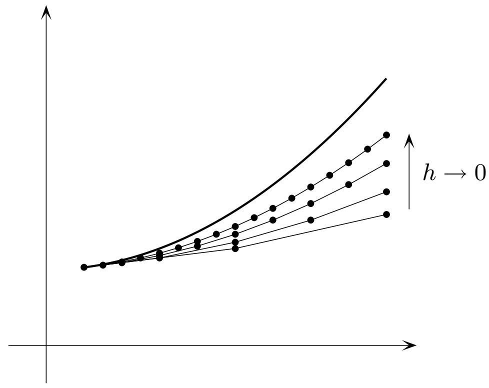
nous n'avons qu'à poser $y_{k+1}=(1+ha_k)y_k+hb_k$. C'est la relation générale au moyen de laquelle les y_k sont définis pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$.

Remarquez bien que nous avons fait ci-dessus des approximations d'approximations... et rien ne nous garantit pour le moment que nous avons une approximation raisonnable de y. La figure ci-contre illustre le début du calcul des y_k. On y observe l'effet des approximations emboîtées et la déviation observée paraît bien grande.



- On peut montrer, avec des moyens que nous n'avons pas, que tout ce travail d'approximation n'est pas vain.

Précisément, si a et b sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ — cela signifie que a et b sont dérivables sur $[\alpha, \beta]$ et que a' et b' y sont continues — alors la quantité $\max_{0 \leqslant k \leqslant n} |y(x_k) - y_k|$, qui représente l'écart maximum entre les valeurs de la solution exacte y et les approximations calculées au moyen de la méthode d'Euler, tend vers 0 quand n tend vers ∞. Bref, plus le pas h tend vers 0 — cela équivaut au fait que n tende vers ∞ puisque $h = \dfrac{\beta - \alpha}{n}$ — plus l'approximation obtenue est bonne ; à l'infini, elle est même parfaite. La figure ci-contre illustre ce phénomène pour différentes valeurs du pas h — chaque courbe affine par morceaux est obtenue pour une certaine valeur de h et les points y_k sont figurés par des points noirs.



Exemple Soit $a \in \mathbb{R}$. Que nous donne la méthode d'Euler dans le cas simple où on veut approximer l'unique solution de l'équation $y' = ay$ pour laquelle $y(0) = 1$? Nous savons que cette solution est la fonction $x \longmapsto e^{ax}$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Avec les notations précédentes, posons $\alpha = 0$, $\beta = x$ et $h = \dfrac{x}{n}$. On part de $y_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_{k+1} = (1 + ah)y_k$. La suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $(1 + ah)$, d'où l'affirmation : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad y_k = (1 + ah)^k$. En particulier, $y_n = \left(1 + \dfrac{ax}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{ax}{n}\right)}$. Or nous savons que $\lim_{u \to 0} \dfrac{\ln(1 + u)}{u} = 1$, et donc, par composition « $u = \dfrac{ax}{n}$ », que $\lim_{n \to \infty} n \ln\left(1 + \dfrac{ax}{n}\right) = ax$. Enfin, par composition avec l'exponentielle, $\lim_{n \to \infty} y_n = e^{ax}$. Dans ce cas particulier, la méthode d'Euler nous fournit bien une approximation de la solution exacte.